

一 1 函数 $y=x^3$ 当 $x=2$, $\Delta x=0.01$ 时微分为 _____

解 $dy = y' dx = 3x^2 dx$ $dy|_{x=2} = 3 \cdot 2^2 \times (0.01) = 0.12$
 $\Delta x=0.01$

2 设 $y = x \sin x + \cos x$, 则 $dy =$ _____

解 $dy = y' dx = (\sin x + x \cos x - \sin x) dx = x \cos x dx$

3 设 $y = \frac{\ln x}{x}$, 则 $dy =$ _____

解 $dy = y' dx = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' dx = \left(\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} \right) dx = \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$

4 已知 $df(\sin 2x)|_{x=0} = dx$, 则 $f'(0) =$ _____

解: $df(\sin 2x)|_{x=0} = f'(\sin 2x) \cdot 2 \cos 2x dx|_{x=0} = f'(0) \cdot 2 dx = dx$
 $\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

二 1 设 $y = \cos^2 \frac{1}{x}$, 求 dy

解 $dy = y' dx = 2 \cos \frac{1}{x} (-\sin \frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) dx = \frac{\sin^2 \frac{1}{x}}{x^2} dx$

2 设 $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$, 求 dy

解 $dy = y' dx = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \cdot (e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}) dx = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$

3 设 $y = \arctan \frac{x^2-1}{x^2+1}$, 求 dy

解 $dy = y' dx = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^2} \cdot \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} dx$

$= \frac{(x^2+1)^2}{2(x^4+1)} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{2x}{x^4+1} dx$

注 参考答案为 $-\frac{2x}{x^4+1} dx$, 不具有参考价值.

二 4 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 求 $dy|_{x=\pi}$

解: $\ln y = x \ln(1 + \sin x) \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \ln(1 + \sin x) + \frac{x \cos x}{1 + \sin x}$

$$\Rightarrow y' = y \left[\ln(1 + \sin x) + \frac{x \cos x}{1 + \sin x} \right] dx \quad dy = y' dx|_{x=\pi} =$$

$$= (1 + \sin x)^x \left[\ln(1 + \sin x) + \frac{x \cos x}{1 + \sin x} \right] dx$$

$$dy|_{x=\pi} = y' dx|_{x=\pi} = (1 + \sin \pi)^\pi \left[\ln(1 + \sin \pi) + \frac{\pi \cos \pi}{1 + \sin \pi} \right] dx = -\pi dx$$

5 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 确定, 求 $dy|_{x=0}$

解: 由 $x=0 \Rightarrow y(0) = 1$

方程两边同时对 x 求导 $(y + xy') 2^{xy} \ln 2 = 1 + y'$

把 $x=0, y(0)=1$ 代入 $(1 + 0 \cdot y') \cdot 2^{0 \cdot 1} \ln 2 = 1 + y'(0)$

$$\Rightarrow y'(0) = \ln 2 - 1 \Rightarrow dy|_{x=0} = y' dx|_{x=0} = (\ln 2 - 1) dx$$

6 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 4xy = 1 - x^2$ 确定, 求 dy

解: 方程两边同时对 x 求导 $e^y \cdot y' + 4y + 4xy' = -2x$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2x - 4y}{4x + e^y} \Rightarrow dy = y' dx = -\frac{2x + 4y}{4x + e^y} dx$$

7 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x = y^y$ 确定, 求 dy

解 方程两边同时对 y 求导 $\frac{dx}{dy} = \frac{d(y^y)}{dy} = \frac{de^{y \ln y}}{dy} = e^{y \ln y} (1 + \ln y)$

$$= y^y (1 + \ln y) \Rightarrow dy = \frac{1}{y^y (1 + \ln y)} dx = \frac{1}{x(1 + \ln y)} dx$$

8 设 $y = f^2(x) e^{f(x)}$, 且 f 可微, 求 dy

解: $y' = 2f(x) \cdot f'(x) e^{f(x)} + f^2(x) e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$$dy = y' dx = [2f(x) \cdot f'(x) e^{f(x)} + f^2(x) e^{f(x)} \cdot f'(x)] dx$$

$$= f(x) f'(x) e^{f(x)} [2 + f(x)] dx$$

华东交通大学考试专用答题纸 (适用于非匿名改卷)

姓名: 廖国勇 学号: 0 课程: 高等数学A(I)
 教学班级: 0 教学小班序号: 0

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

考生注意: 答题时应注明题号, 并按题号顺序答题。

题号	答 题 内 容
P55	
二 9	计算 $\sqrt[3]{8.02}$ 的近似值 解: 设 $y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$, 则 $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ $dy=y'dx=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$ $\sqrt[3]{8.02} - \sqrt[3]{8} = f(8+0.02) - f(8) \approx f'(8) \times 0.02 = \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} \times 0.02$ $\Rightarrow \sqrt[3]{8.02} \approx f(8) + \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} \times 0.02 = 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0.02 \approx 2.0017$
三 1	当 x 较小时, 证明: $\ln(1+x) \approx x$ 证明: $\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln 1 \approx \frac{1}{1+x} x \approx x$ 设 $f(x)=\ln(1+x)$, $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x = x$ ($f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$) $\downarrow \quad \downarrow$ 0 x
2	设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 证明 ① $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微, ② $f'(x)$ 在 $x=0$ 不可微分 解 (1) $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0$ 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = (x^3 \sin \frac{1}{x})' = 3x^2 \sin \frac{1}{x} + (\cos \frac{1}{x}) \cdot (-x)$, 于是 $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (2) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x} - \Delta x \cos \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - \cos \frac{1}{\Delta x})$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\cos \frac{1}{\Delta x}$ 不存在